Probabilités L3 S6, 2021

Université de Picardie Jules Verne

Probabilités (10)

Loi des grands nombres

Thm : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et de carré intégrable ($X_n \in \mathcal{L}^2$, $\forall n \geq 0$).

On note $m = E(X_n)$ leur moyenne commune et on définit $(M_n)_n$ (moyenne)

$$M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Alors $(M_n)_n$ CV vers m presque sûrement et en moyenne quand $n \to +\infty$.

(Elle CV donc aussi en probabilités).

↳ En fait on a un peu plus :

$$E\left((M_n - m)^2\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Rque : CV en moyenne $\rightsquigarrow$ loi faible des grands nombres.

CV p.s. $\rightsquigarrow$ loi forte des grands nombres.

dém : notons σ^2 la variance commune des X_n $\quad (V(X_n) = \sigma^2)$

$\hookrightarrow \in \mathcal{L}^2$

Par linéarité de l'espérance on a

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right) = m$$

et de plus,

$$E\left((M_n - m)^2\right) = V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

En particulier $E\left((M_n - m)^2\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad (*)$

Comme $E(|Y|)^2 \leq E(Y^2)$ pour toute v.a. Y, donc

$$(*) \Rightarrow E(|M_n - m|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Preuve de la CV p.s. :

quitte à remplacer X_n par $X_n - m$ (et donc M_n par $M_n - m$)

on suppose que $m = 0$.

Dans un premier temps on va m.q. $(M_{n^2})_n$ CV p.s. vers 0.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, on a pour tout $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$P\left(\left|M_{n^2}\right| \geq \frac{1}{q}\right) \leq \frac{V(M_{n^2})}{1/q^2} = \frac{\sigma^2 q^2}{n^2}$$

Posons $A_{n,q} = \left\{\left|M_{n^2}\right| \geq \frac{1}{q}\right\}$.

On a donc $P(A_{n,q}) \leq \frac{(\sigma q)^2}{n^2}$ donc $\sum_{n \geq 1} P(A_{n,q})$ CV. (*)

Posons alors $B_{n,q} = \bigcup_{m \geq n} A_{m,q}$ et $C_q = \bigcap_{n \geq 1} B_{n,q} = \limsup_n A_{n,q}$.

(*) + Borel-Cantelli $\Longrightarrow$ $P(C_q) = 0$.

On pose $N = \bigcup_{q \geq 1} C_q$; on a $P(N) \leq \sum_{q=1}^{+\infty} P(C_q) = 0$.

Maintenant, si $\omega \notin N$, alors $\omega \in \overline{\bigcup_{q \geq 1} C_q} = \bigcap_{q \geq 1} \overline{C_q}$

i.e. $\omega \notin C_q$, pour tout $q \geq 1$.

Mais $C_q = \bigcap_{n \geq 1} B_{n,q}$ donc $\omega \notin N \Rightarrow \omega \notin B_{n,q}$ pour n assez grand.

$\left((B_{n,q})_n \downarrow \text{ en } n \right)$

En d'autres termes, $\forall \omega \notin N$, $\forall q \geq 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand t.q.

$$M_{k^2}(\omega) \leq \frac{1}{q} \quad \text{pour tout } k \geq n_0.$$

Par conséquent, $M_{n^2}(\omega) \longrightarrow 0$ si $\omega \notin N$. Mais $P(N) = 0$, donc

$$M_{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{p.s.}$$

Montrons maintenant que $(M_n)_n$ CV p.s. vers 0.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $p(n) \in \mathbb{N}$ l'entier t.q. $(p(n))^2 \leq n < \underbrace{(p(n)+1)^2}_{(p(n))^2+2p(n)+1}$.

$\left(p(n) \leq \sqrt{n} < p(n)+1 \text{ donc } p(n) = E(\sqrt{n}) \right)$

Alors $M_n - \frac{(p(n))^2}{n} M_{(p(n))^2}$

$$= \frac{1}{n}\left((X_1 + \dots + X_n) - (X_1 + \dots + X_{(p(n))^2}) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{p=(p(n))^2+1}^{n} X_p$$

on a : $n - ((p(n))^2+1) + 1 = n - (p(n))^2$ termes

et comme les v.a. $(X_k)_k$ sont indépendantes, on a

$$E\left(\left(M_n - \frac{(p(n))^2}{n} M_{(p(n))^2} \right)^2 \right) = \left(n - (p(n))^2 \right) \frac{V(X_p)}{n^2}$$

$$= \frac{n - (p(n))^2}{n^2} \sigma^2 \leq \frac{2p(n)+1}{n^2} \sigma^2 \leq \frac{2\sqrt{n}+1}{n^2} \sigma^2$$

$$\rightsquigarrow E\left(\left(M_n - \frac{p(n)^2}{n} M_{p(n)^2}\right)^2\right) \leq \frac{2\sqrt{n}+1}{n^2}\sigma^2 .$$

Par Bienaymé - Tchebicheff on déduit

$$P\left(\left|M_n - \frac{p(n)^2}{n} M_{p(n)^2}\right| \geq a\right) \leq \frac{2\sqrt{n}+1}{n^2} \times \frac{\sigma^2}{a^2} = O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

On pose alors $\forall q \in \mathbb{N}^*$:

$$A'_{n,q} = \left\{ \left|M_n - \frac{p(n)^2}{n} M_{p(n)^2}\right| \geq \frac{1}{q} \right\} .$$

On a : $P\left(A'_{n,q}\right) \leq \frac{2\sqrt{n}+1}{n^2} \times q^2\sigma^2 = O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$

donc $\sum_n P\left(A'_{n,q}\right)$ CV

En argumentant comme pour (*) on déduit que $M_n - \frac{p(n)^2}{n} M_{p(n)^2} \to 0$ p.s.
(Borel-Cantelli ...)

$$M_n - \frac{p(n)^2}{n} M_{p(n)^2} \to 0 \text{ p.s.} \qquad (**)$$

Mais d'après ce qu'on a montré ci-dessus, $M_{p(n)^2} \longrightarrow 0$ p.s.

(c'est une suite de v.a. extraite de $(M_{p^2})_p$)

et de plus $\frac{p(n)^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ par notre choix de $p(n)$.

$\rightsquigarrow (**) \Longrightarrow M_n \to 0$ p.s. quand $n \to +\infty$. ∎

Remarque : Soit A un événement. On répète une expérience et on note X_n la v.a. qui vaut $\begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé au cours de la } n\text{-ème exp.}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La fréquence de réalisation de A est donc $f_n(A) = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = M_n$.

Les (X_i) sont iid et $E(X_i) = P(X_i = 1) = P(A)$.

Donc la loi des grands nombres $\Rightarrow$ $f_n(A)$ CV p.s. vers $P(A)$.

On obtient une justif. a posteriori de l'approche par les fréquences.

Exemple : jeu de pile ou face infini.

on $(X_n)_n$ suite de v.a. prenant les valeurs 0 ou 1.

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ on $\omega = x_1, \dots, x_n, \dots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$.

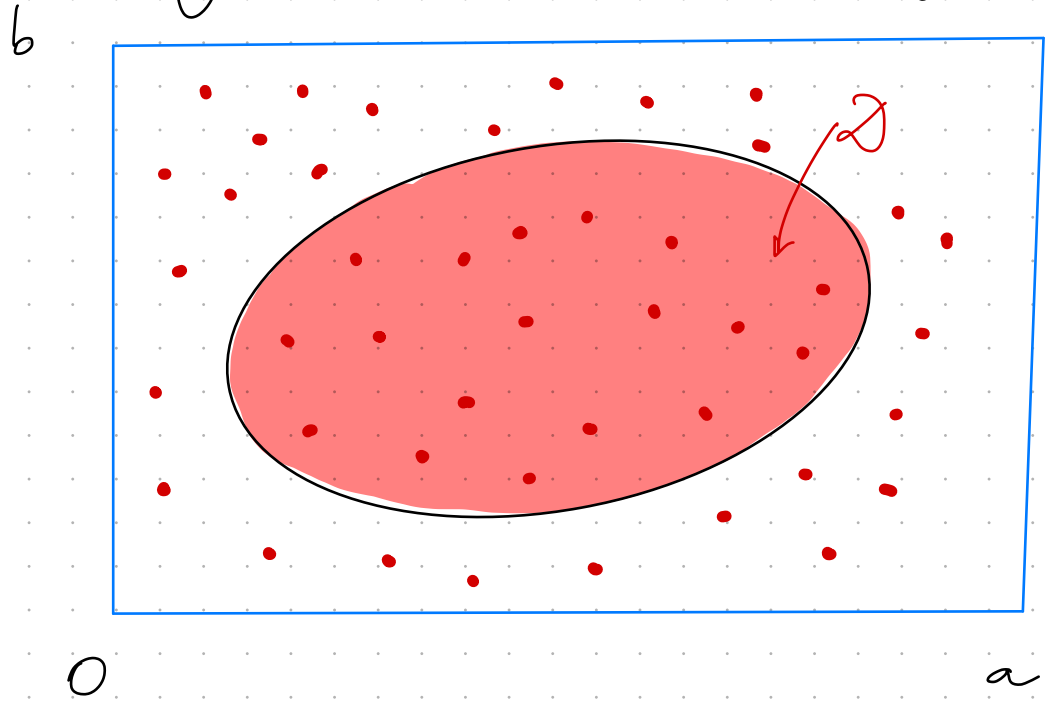
Soit P_p une proba. t.q. $(X_n)_n$ indép. et de loi de Bernoulli de param. $p \in]0,1[$.

La loi des grands nombres $\Rightarrow$ $\forall (x_n)_n \in \Omega$ en dehors de N avec $P(N) = 0$

$$\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \longrightarrow p \text{ quand } n \to +\infty.$$

Méthode de Monte-Carlo

loi des grands nombres au calcul d'intégrales.



$R = [0,a] \times [0,b] \subset \mathbb{R}^2$, $a,b>0$.

$\mathcal{D} \subset R$

On veut calculer l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$.

Pour cela on se donne $(X_n)_n$ de loi uniforme sur R, et on estime :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) \approx \frac{1}{n}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(X_1) + \dots + \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(X_n)\right)$$

Corollaire : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indép. de loi uniforme sur $[0,1]$, et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée (ex. : f continue)

Alors
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(X_1) + \dots + f(X_n)}{n} \quad \text{(pour la CV p.s.)}$$

dém : on applique la loi des grands nombres à la suite $(f(X_i))_{i \geq 1}$.

Les v.a. $f(X_i)$ sont dans $\mathcal{L}^2$, indép., et $E(f(X_i)) = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Loi des grands nombres $\Rightarrow$ $M_n = \dfrac{f(X_1) + \dots + f(X_n)}{n} \xrightarrow[p.s.]{} E(f(X_i)) = \int_0^1 f(x)\,dx$

Remarque : cela se généralise à toutes les dimensions.

(f mes. bornée sur $A \subset \underset{\mathbb{R}^d}{\underset{\cap}{[-K, K]^d}}$, $d \geq 1$, $K > 0$.

$(X_n)_n$ suite de v.a. indép. de loi uniforme sur $[-K, K]^d$)

Convergence en loi

Déf. : Soit $(X_n)_n$ suite de v.a. sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$; on dit que $(X_n)_n$ **converge en loi** vers une v.a. X, ce qu'on écrit $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si $\forall$ fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}^d$,

$$E\big(f(X_n)\big) \longrightarrow E\big(f(X)\big), \qquad n \to +\infty.$$

Ex. : $(X_n)_n$ et X des v.a. de lois resp. $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Supposons que $(\sigma_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ CV vers $\sigma > 0$

alors $(X_n)_n$ CV en loi vers X : $\forall f$ continue bornée sur $\mathbb{R}$,

$$E\big(f(X_n)\big) = \int f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}}\, dy \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CV dominée}} \int f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy$$

$$= E\big(f(X)\big).$$

Prop. : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X$, alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$

dém. : Supposons que $X_n \xrightarrow{P} X$.

Soit f continue bornée sur $\mathbb{R}^d$.

Alors $(f(X_n))_n$ CV en proba. vers $f(X)$.

Comme f est bornée, la CV en proba. $\Rightarrow$ $(f(X_n))_n$ CV en moyenne vers $f(X)$.

En particulier $E(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(f(X))$. ■

Prop. : Soient X_n et X des v.a.r. de fonctions de répartition respectives F_n et F.

Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ <u>ssi</u> $F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$ pour tout x où F est continue.

(rappel : F est C^0 à droite et $\nearrow$ et l'ensemble des points x où F n'est pas continue est l'ensemble $\{x : F(x^-) < F(x)\}$ est au plus dénombrable)

Corollaire : si la suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles CV en loi vers X, et si la loi de X a une densité, alors pour tout $a<b$,

$$P\left(X_n \in]a,b]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(X \in]a,b]\right).$$

Prop. : Soient X_n et X des vecteurs aléatoires. Pour que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ il faut et il suffit que $E(f(X_n)) \longrightarrow E(f(X))$, pour toute fonction f Lipschitzienne bornée.

Théorème : (Théorème de Lévy)

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

a) Si $(X_n)_n$ CV en loi vers X, alors $(\phi_{X_n})_n$ CV simplement vers ϕ_X.

b) Si les (ϕ_{X_n}) CV simplement vers une fonction (complexe) ϕ sur $\mathbb{R}^d$.
Si la fonction ϕ est continue en 0, alors c'est la fonction caractéristique d'une v.a. X, et on a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Résumé des relations entre les différents modes de convergence